Warszawa, 8 maja 2001.

# *Modele matematyczne w biologii i medycynie*
# Kolokwium

## Grupa A

*Zadanie 1* (10 pkt.).
Rozwiązać równanie z opóźnieniem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{x(t-1)}{e}, & t \geqslant 0, \\ x(t) &= e^{-t}, & t \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

*Zadanie 2* (10 pkt.).
Narysować diagram bifurkacji dla równania

$$x_{n+1} = x_n^4 + \mu x_n .$$

*Zadanie 3* (20 pkt.).
Rozpatrzmy model opisujący rozwój nowotworu w organiźmie:

$$\begin{aligned} T' &= \alpha T - \beta T L \\ L' &= (a - \alpha) T L - b T^2 L - c(L - L^*), \end{aligned}$$

gdzie $T$ oznacza liczbę komórek nowotworowych a $L$ — liczbę komórek limfocytów. Po przeskalowaniu zmiennych otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma x - x y \\ \dot{y} &= (\sigma - 1) x y - x^2 y - \mu(y - y^*), \end{aligned} \qquad (*)$$

gdzie $\gamma, \sigma, \mu, y^*$ są dodatnimi stałymi.

a) Udowodnić, że jeśli $x(0)$, $y(0)$ są nieujemne to $x(t)$, $y(t)$ są także nieujemne dla $t \geqslant 0$.

b) Wyznaczyć punkty stacjonarne układu $(*)$ i analitycznie zbadać ich stabilność dla przypadku $\sigma = 1$.

c) Narysować obrazy fazowe układu $(*)$ w pierwszej ćwiartce w przypadkach, gdy są dwa punkty stacjonarne (w pierwszej ćwiartce).

*Zadanie 4* (10 pkt.).
Rozpatrujemy dwa rodzaje szczepionek przeciwko grypie: GrypA© i GrypSuper©. Wirusy grypy mutują i po pewnym czasie powyższe szczepionki nie zabezpieczają przed zachorowaniem na grypę. Szczepy grypy nieodporne na żadną z tych szczepionek mogą zmutować i stać się w następnym roku odporne: na GrypSuper© — z prawdopodobeństwem 5%, na GrypA© — z prawdopodobeństwem 20%. Szczepy odporne na GrypA© mogą zmutować i w następnym roku: stracić odporność — z prawdopodobieństwem 25% oraz nabyć odporność na GrypSuper© — z prawdopodobieństwem 15%. Szczepy odporne na GrypSuper© są odorne na GrypA© i nie tracą nabytej już odporności. Po ilu (średnio) latach wszystkie szczepy będą odporne na GrypSuper©. Narysować graf prześć, obliczyć wektor prawdopodobieństwa stacjonarnego.

Warszawa, 8 maja 2001.

# Kolokwium z
# *Modele matematyczne w biologii i medycynie*

## Grupa B

*Zadanie 1* (10 pkt.).
Rozwiązać równanie z opóźnieniem:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = -x(t - e^{-1}), && t \geqslant 0, \\ &x(t) = e^{-et}, && t \in [-e^{-1}, 0]. \end{aligned}$$

*Zadanie 2* (10 pkt.).
Narysować diagram bifurkacji dla równania

$$x_{n+1} = x_n^5 + \mu x_n .$$

*Zadanie 3* (20 pkt.).
Rozpatrzmy model opisujący rozwój nwotworu w organiźmie:

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \alpha T - \beta T L \\ \dot{L} &= (a - \alpha) T L - b T^2 L - c(L - L^*), \end{aligned}$$

gdzie $T$ oznacza liczbę komórek nowotworowych a $L$ — liczbę komórek limfocytów. Po przeskalowaniu zmiennych otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \gamma x - xy \\ \dot{y} &= (\sigma - 1)xy - x^2 y - \mu(y - y^*), \end{aligned} \qquad (*)$$

gdzie $\gamma, \sigma, \mu, y^*$ są dodatnimi stałymi.

a) Udowodnić, że jeśli $x(0)$, $y(0)$ są nieujemne to $x(t)$, $y(t)$ są także nieujemne dla $t \geqslant 0$.

b) Wyznaczyć punkty stacjonarne układu $(*)$ i analitycznie zbadać ich stabilność dla przypadku $\sigma = 1$.

c) Narysować obrazy fazowe układu $(*)$ w pierwszej ćwiartce w przypadkach, gdy są dwa punkty stacjonarne (w pierwszej ćwiartce).

*Zadanie 4* (10 pkt.).
Choroba *oróbsko* ma dwie odmiany – łagodną i ostrą. Osoby, które zachorowały na odmianę ostrą nabywają odporność na wszystkie odmiany oróbska na całe życie. Osoby, które zachorowały na odmianę łagodną nabywają oporność tylko na tę odmianę oraz mogą ją stracić każdego roku z prawdopodobieństwem 15%. Prawdopodobieństwo zachorowania na odmianę ostrą oróbska w każdym roku wynosi 5%, zarówno dla osób odpornych na odminę łagodną jak i dla osób nieodpornych. Po ilu (średnio) latach wszyscy staną się odporni na oróbsko? Narysować graf prześć, obliczyć wektor prawdopodobieństwa stacjonarnego.

# *Modele matematyczne w biologii i medycynie*
# Egzamin, 12 maja 2001

*Zadanie 1* (10 pkt.).

Rozpatrzmy leśny ekosystem z uwzględnieniem podziału drzew na dojrzałe (stare) i niedojrzałe (młode) oraz szkodnika, który żywi się drzewami dojrzałymi. Załóżmy, że drzew młodych przybywa wraz ze wzrostem liczby drzew starych i podobnie młodych drzew przybywa wraz ze wzrostem liczby starych. Wszystkie drzewa (zarówno młode jak i stare) konkurują ze sobą o zasoby środowiska. Dodatkowo następuje zaleianie przez człowieka (dla uproszczenia, w stałym tempie). Szkodniki rozmnażają się w zależności od ilości zjedzonego pożywienia, ale jeden szkodnik nie może zjeść więcej niż pewna maksymalna ilość pokarmu. Szkodniki także giną naturalną śmiercią.

Zaproponować model opisujący powyższą sytuację. Wyjaśnić znaczenie poszczególnych składników i współczynników.

*Zadanie 2* (10 pkt.).

Uprościć model z zadania 1 zakładając, że sumaryczne zagęszczenie drzew młodych i starych utrzymuje się na stałym poziomie (np. poprzez dodatkowe zalesienia). Narysować portret fazowy otrzymanego w ten sposób układu równań.

*Zadanie 3* (10 pkt.).

Do omawianego wyżej zagadnienia las–szkodnik zastosować model Lotki-Voltery z ograniczoną pojemnocią środowiska oraz z dodatkowym założeniem, że owady podlegają procesowi dyfuzji na powierzchni lasu. Sformułować odpowiedni model przy założeniu, że powierzchnia lasu jest kwadratem $[0;1]^2$ i nie ma możliwości rozprzestrzeniania się owadów na zewnątrz.

*Zadanie 4* (10 pkt.).

W modelu z zadania 3 zbadać czy możliwe jest występowanie niestabilności dyfuzyjnej (formowania się wzorców Türinga).

*Zadanie 5* (10 pkt.).

Zaproponować łańcuch pokarmowy (prawdopodobny, czyli taki, którego istnienie w rzeczywistości jest możliwe), w którym istnieją dwa gatunki z najwyższym statusem troficznym i ten status jest dla obu taki sam.

*Zadanie 6* (10 pkt.).

Załóżmy, że dziedziczenie dwóch cech (kolor i faktura włosów) jest niezależne. Dla uproszczenia załóżmy, że włosy mogą być czarne (cecha dominująca) lub białe oraz kręcone (cecha dominująca) lub proste. Genotyp będzie zatem parą — genotyp koloru + genotyp faktury. Np. $DH$ oznacza osobnika dominującego ze względu na kolor i hybrydę ze względu na fakturę (czarne kręcone włosy jako fenotyp). Skonstruować macierz przejścia dla łańcucha Markowa powstającego przy ciągłym krzyżowaniu z podwójną hybrydą $HH$.

*Powodzenia!*