

## Egzamin z Metod Matematycznych w Biologii i Medycynie - Termin 0.

1. (15 pkt.) Dane jest równanie różnicowe

$$x_{n+1} = \mu e^{x_n}, \quad \mu > 0.$$

- (a) Jakiego typu proces może opisywać to równanie?
- (b) W zależności od parametru  $\mu$  wyznaczyć stany stacjonarne i zbadać ich stabilność.

2. (35 pkt.) (a) Zaproponować model interakcji między przeciwciałami a antygenami zakładając, że antygen jest aktywny, aktywacja przeciwciał w wyniku obecności antygeny ulega wysyceniu (nie wzrasta do  $\infty$  przy zagęszczeniu antygeny rosnącym do  $\infty$ , tylko stabilizuje się na pewnym ograniczonym poziomie), a śmiertelność przeciwciał zależy od ich zagęszczenia.

(b) Przeprowadzić analizę modelu zaproponowanego w punkcie (a):

- b1)** wykazać istnienie i jednoznaczność rozwiązań;
- b2)** wykazać nieujemność rozwiązań dla nieujemnych danych początkowych;
- b3)** wyznaczyć stany stacjonarne;
- b4)** zbadać lokalną stabilność stanów stacjonarnych;
- b5)** zbadać globalną stabilność stanów stacjonarnych;
- b6)** naszkicować portret fazowy;
- b7)** przeanalizować możliwość występowania rozwiązań okresowych lub cykli granicznych.

3. (30 pkt.) Niech będzie dany pseudowielomian charakterystyczny

$$D(\lambda) = \lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0, \quad a, b > 0. \quad (1)$$

- a) Jakie równanie różniczkowe z opóźnieniem odpowiada temu pseudowielomianowi?
- b) Jaki proces biologiczny (biochemiczny) może opisywać takie równanie?
- c) Korzystając z kryterium Michajłowa znaleźć warunki gwarantujące, że wszystkie pierwiastki pseudowielomianu charakterystycznego (1) mają ujemne części rzeczywiste.
- b) Wyznacz najmniejszą wartość  $\tau$  oraz warunki jakie muszą spełniać parametry  $a$  i  $b$ , aby istniały pierwiastki pseudowielomianu charakterystycznego (1) przechodzące z lewej do prawej półpłaszczyzny zespolonej wraz ze wzrostem parametru  $\tau$ .

4. (20 pkt)

- (a) Wyjaśnij pojęcie łańcucha pokarmowego i odpowiadającego mu grafu konkurencji.
- (b) Wyjaśnij pojęcie statusu troficznego.
- (c) Zaproponuj prosty łańcuch pokarmowy, w którym występują co najmniej czterej drapieżcy, z których dwaj mają ten sam status troficzny.

**Uwaga:** Zadania należy oddać na osobnych kartkach podpisane i ponumerowane.

*Powodzenia!*